FEUILLE DE TD/TP 5
SIMULATION DE CHAÎNES DE MARKOV ET MÉTHODES MCMC

1. Simulation de chaînes de Markov.

Exercice 1. Le marché des forfaits de téléphonie mobile d'un pays se répartit entre trois entreprises A, B et C. Chaque mois, une certaine proportion des clients change d'opérateur et cette proportion est supposée invariante dans le temps. Ainsi modélise-t-on l'évolution du choix d'un client par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la matrice de transition est présentée ci-dessous :

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que P est récurrente, irréductible et apérodique.

(2) Écrire un programme qui prend en paramètre une loi μ sur $\{1,\dots,n\}$ et qui simule une réalisation de μ.

(3) Écrire un programme qui prend en paramètre une loi μ et un entier n et qui simule les $(n+1)$ premiers termes de la chaîne $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ avec loi initiale μ. Représenter l'évolution de X_k en fonction du temps.

(4) Expliquer pourquoi la chaîne de Markov admet une unique probabilité invariante π. La calculer numériquement.

(5) On suppose qu'à l'instant initial, l'opérateur du client est choisi selon la loi $\mu_0 = (0.6, 0.4, 0)$. Quelle est la limite presque sûre de $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{X_k=A}$? Illustrer cette convergence numériquement.

Exercice 2. On considère la marche aléatoire simple au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}$ issue de $x\in\mathbb{Z}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = x \\ S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \end{cases}$$

où $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.i.i.d. telle que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1-p$$

pour un certain $p \in]0,1[$.

(1) Écrire une fonction `ma(x,p,N)` qui produit une trajectoire $(S_n)_{0\leq n\leq \mathtt{N}}$ de la marche issu de `x` et de paramètre `p`.

(2) Écrire une fonction `maT(a,b,x,p)` qui produit une trajectoire $(S_n)_{0\leq n\leq T_{ab}}$ de la marche issue de $a\leq x\leq b$ jusqu'au temps d'atteinte de $\{a,b\}$.

(3) Utiliser la fonction précédente pour construire une fonction `sortie(a,b,x,p,m)` qui estime la probabilité que la marche issue de `x` touche `a` avant `b` en simulant `m` réalisations de $(S_n)_{0\leq n\leq T_{ab}}$ et une fonction `EspT(a,b,x,p,m)` qui estime l'espérance $\mathbb{E}_x[T_{ab}]$.

Exercice 3. On considère la marche aléatoire simple au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}^2$ issue de $(0;0) \in \mathbb{Z}^2$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = (0;0) \\ S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \end{cases}$$

où $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.i.i.d. telle que

$$\mathbb{P}(X_1 = (1;0)) = p_1,\ \mathbb{P}(X_1 = (-1;0)) = p_2,\ \mathbb{P}(X_1 = (0;1)) = p_3, \quad \text{et } \mathbb{P}(X_1 = (0;-1)) = p_4\,.$$

où $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$.

(1) Écrire une fonction `maZ2(p,N)` qui produit une trajectoire $(S_n)_{0\leq n\leq \mathtt{N}}$ de la marche issue de `x` et de paramètre $p = (p_1, \ldots, p_4)$.
(2) Représenter graphiquement les trajectoires de la marche dans $\mathbb{Z}^2$ et illustrer le fait que $(0;0)$ est récurrent ssi pour tout $1 \leq i \leq 4$, $p_i = 1/4$.

Exercice 4. *File d'attente.*
On étudie l'évolution d'une file d'attente à un guichet. On suppose qu'un client est servi par unité de temps. On note N_n le nombre de clients arrivant dans la $n^{\text{ième}}$ unité de temps. On suppose que les variables N_n s'écrivent $G_n - 1$ où les $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des v.a.i.i.d. de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ pour un certain $p \in]0;1[$ et qu'un client arrivant à la période n ne peut pas être servi avant la période $n+1$. Finalement, on note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n et on suppose que $X_0 = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = N_{n+1} + X_n - \mathbb{1}_{X_n \geq 1}\,.$$

(1) Écrire une fonction `File` qui simule le nombre de personnes dans la file d'attente sur n pas de temps pour un paramètre $p \in]0;1[$ fixé.
(2) Illustrer numériquement le fait que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini si $p < 1/2$ et que 0 est un état récurrent de la chaîne si $p > 1/2$.

2. Algorithme de Metropolis-Hastings

Exercice 5. *Loi de Poisson.*
En utilisant le noyau de transition $Q(x,\cdot) = \frac{1}{2}\delta_{(x-1)\vee 0} + \frac{1}{2}\delta_{x+1}$, écrire un programme qui simule une loi de Poisson de paramètre λ par l'algorithme de Metropolis-Hastings.

Exercice 6. *Modèle d'Ising.*
Il s'agit d'un modèle de physique statistique. Il a été utilisé pour modéliser différents phénomènes, notamment le ferromagnétisme, dans lesquels des effets collectifs sont produits par des interactions locales entre particules à deux états. Nous allons ici étudier une version simple en dimension 2. On considère, pour un N fixé, le carré $C_N = \{0, \ldots, N\}^2$. On définit l'espace des configurations $E = \{-1, 1\}^{C_N}$ et la mesure de probabilité sur E (loi de Boltzmann) :

$$\forall x \in E,\ \pi(x) = \frac{1}{Z_T} e^{-\frac{1}{T}H(x)}$$

où

$$H(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,m' \in C_N \\ |m-m'|=1}} |x(m) - x(m')|^2$$

et Z_T est une constante de renormalisation pour que π soit bien une mesure de probabilité.
Le carré C_N modélise un réseau bidimensionel d'atomes m et les quantités $x(m)$ leurs spins respectifs qui sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1;+1\}$. Les spins de tous

ces atomes ne sont pas indépendants. L'idée de Boltzmann est de postuler que la loi de l'ensemble des spins est une fonction de l'énergie du réseau :

$$H(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,m' \in C_N \\ |m-m'|=1}} |x(m) - x(m')|^2$$

Ainsi, moins les valeurs des $x(m)$ sont similaires, plus l'énergie du système est élevée et moins la configuration est probable. Il est difficile de simuler une loi de Boltzmann, car on ne peut pas s'y prendre atome après atome, vu qu'ils sont tous dépendants les uns des autres. L'idée est alors d'utiliser la méthode de Metropolis-Hastings. On propose d'étudier le cas de deux noyaux de transition.

(1) On note x^m la configuration $x \in E$ où l'on a inversé le spin m :

$$x^m(k) = \begin{cases} x(k) & \text{si } k \neq m \\ -x(m) & \text{si } k = m \end{cases}$$

On considère alors le noyau de transition Q sur E défini par

$$\forall m \in C_N,\ Q(x, x^m) = \frac{1}{|C_N|} .$$

(a) Expliquer le mécanisme probabiliste associé à Q et montrer que Q vérifie les hypothèses nécessaire pour mettre en place l'algorithme de Metropolis-Hastings.
(b) Calculer $H(x^m) - H(x)$.
(c) Programmer une fonction qui permet de simuler une réalisation de la loi π par l'algorithme de Metropolis-Hastings et le noyau Q.

(2) On se propose de construire un noyau $\widetilde{Q}$ plus performant. Pour cela, on partitionne l'espace C_N en :

$$C_N^+ = \{ (m_1, m_2) \in C_N,\ m_1 + m_2 \text{ est pair} \} \quad \text{et}$$
$$C_N^- = \{ (m_1, m_2) \in C_N,\ m_1 + m_2 \text{ est impair} \}$$

Et pour $x \in E$, on note $x^+ = (x(m),\ m \in C_N^+)$ et $x^- = (x(m),\ m \in C_N^-)$.
(a) Soit X de loi π et $x \in E$. Calculer $\pi(x^+|x^-) = \mathbb{P}(X^+ = x^+|X^- = x^-)$.
(b) On construit $\widetilde{Q}$ comme le noyau de transition associé à la chaîne de Markov suivante. On part de $X_0 = x_0$ et, pour construire X_{n+1} à partir de X_n, on tire une variable U de loi $\mathcal{U}([0,1])$, indépendamment de $X_1, \ldots, X_n$.
- Si $U \leq 1/2$, on tire Y^+ de loi $\pi(\cdot|X_n^-)$ et on pose $(X_{n+1}^+, X_{n+1}^-) = (Y^+, X_n^-)$.
- Si $U > 1/2$, on tire Y^- de loi $\pi(\cdot|X_n^+)$ et on pose $(X_{n+1}^+, X_{n+1}^-) = (X_n^+, Y^-)$.

Expliciter le noyau $\widetilde{Q}$ et montrer que $\widetilde{Q}$ vérifie les hypothèses de l'algorithme de Metropolis-Hastings.
(c) Utiliser ce nouveau noyau pour programmer une fonction qui permet de simuler une réalisation de la loi π par l'algorithme de Metropolis-Hastings.